

文章编号: 1005-0388(2000) 01-0065-05

微波生物医学成像算法中的病态及伪逆问题^{*}

陈 星, 黄卡玛, 袁 渊, 赵 翔, 刘长军, 闫丽萍

(四川大学电子信息学院, 610064)

摘要:将微波成像应用于生物医学领域中具有许多潜在应用优势。如同其它物理逆问题, 下面的两个问题是微波成像计算中常遇到的: 1、是否能得到唯一解? 2、解是否稳定? 这两个问题通常称为伪逆和病态问题。它们严重影响了逆问题求解的准确性。文中介绍了微波成像算法的基本原理, 就伪逆和病态的概念进行了讨论, 给出了正则化方法等几种可用于求解伪逆和病态问题的方法, 特别通过举例, 讨论了这些求解方法的优点和缺点。

关键词:微波成像; 算法; 病态; 伪逆; 线性方程组; 介电常数

中图分类号: TN 015

文献标识码: A

The discussion of pseudoinversion and Ill-posedness in the calculation of microwave biomedical imaging

CHEN Xing, HUANG Ka-ma, YUAN Yuan, ZHAO Xiang, LIU Chang-jun, YAN Li-ping

(College of Electronic Information of Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: There are many potential advantages in the biomedical applications of microwave imaging. Just like many other inverse problems, microwave imaging usually confronts two problems: 1) Does the inverse problem always have unique solution? 2) Do small perturbations of the forcing function always result in small perturbations of the solution? These problems are usually called pseudoinversion and ill-posedness. They are handicaps to obtain precise solution. This paper introduced the theory of the microwave imaging, discussed the concept of pseudoinversion and ill-posedness. Specifically, presented some methods such as regularizing scheme, which can be used to resolve pseudoinverse and ill-posed problems. Also, the advantages and disadvantages of these methods were discussed.

Key words: Microwave imaging; Algorithm; Pseudoinversion; Ill-posedness; Linear equation; Dielectric permittivity

1 引言

微波成像是以微波作为信息载体的一种成像手段。具体来讲就是用微波照射被测物体, 然后通过对其周围的电磁场分布的测量来重构物体的内部介质特性。

微波成像在许多领域, 特别在生物医学方面, 具有独特的应用优势。首先, 微波成像不受大不连续性

的限制, 对低密度的生物体软组织能很好地区分, 可弥补现阶段超声波、X 光等医学成像手段的不足之处。其次, 微波成像可获得某些生物组织的重要特性, 例如温度分布、血液含量、血液含氧量等。另外, 微波成像所用的微波源功率小于 0.5 mW/cm^2 , 属于相对安全的非电离辐射^[1]。

微波成像的研究在本世纪七十年代末, 首先开始于欧洲。目前, 西班牙、前苏联、日本、美国等许多

国家的科学家相继宣布已成功研制出实际的微波生物医学成像系统^[2~4]。

目前,微波成像算法种类很多,如 FFT 变换,有限差分近似、矩量算法、混合元算法、基于空域 (spatial-domain) 的迭代算法以及 Levenberg-Marquarde 算法等等^[4]。

微波成像中的伪逆问题是由于测量数据过少,不足以唯一确定成像区域内的介电常数分布造成的。对伪逆问题研究的目的在于从无穷多组可能解中挑选出一组最符合实际情况的解。^[5]

绝大多数物理逆问题求解是不稳定的,微波成像计算中,离散化所得到的线性方程组常是病态的^[6~10],测量数据以及计算过程中的微小误差也会造成结果的巨大偏离。由于实际微波成像系统的误差不可避免,研究稳定、准确地求解病态问题具有非常重要的意义。

本文将对伪逆问题和病态问题概念、产生原因进行详细讨论,并结合实例,介绍了范数最小原理、正则化方法、迭代修正方法等求解伪逆和病态的方法。值得指出的是,正则化方法尽管存在一些缺点,仍不失为一种较好的求解伪逆和病态的方法。

2 微波生物医学成像系统及算法

微波成像算法从最早的 FFT 变换,有限差分近似到最近的矩量算法、混合元算法、基于空域 (spatial-domain) 的迭代算法、Levenberg-Marquarde 算法以及近几年才开展研究的超分辨率算法等等^[4]。算法越来越有效和精确。这里简要介绍一下我们研制的微波生物医学成像系统和算法。

如图 1 所示,入射微波为 TM 波,被成像的介质在 Z 方向均匀分布,成像区域为横截面的一个圆形区域,测量点均匀分布在圆周上。区域内的填充介质的介电常数为 ϵ ,被成像介质的介电常数为 ϵ_0 。

在成像区域内,TM 入射波的条件下,可得到如下积分方程:

$$\Phi_{cat}(x,y) = j\omega \mu_0 \iint_A K(x',y') \Gamma(x,y,x',y') dx' dy' \tag{1}$$

其中 $\Gamma(x,y,x',y')$ 是自由空间的格林函数。

$K(x,y)$ 为等效电流密度。等效电流是一种假想的介质内部的电流密度分布,可以认为散射场是由等效电流密度引起的。其表达式为:

$$K = j\omega \epsilon (\epsilon - 1) \Phi_r \tag{2}$$

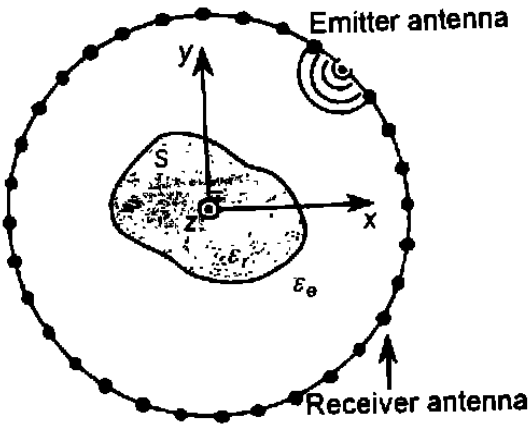


图 1 微波生物医学成像系统原理图

将整个成像区域划分为很小的网格,假设每个网格中的等效电流密度和场强是均匀分布,并对(1)式进行离散化,最终可得一矩阵方程组:

$$[\Phi_{cat}] = [A] \cdot [K] \tag{3}$$

求解后,获得成像区域内的等效电流密度 K 分布。

由(2)式可求出区域内 ϵ 的分布。

微波成像系统测量时,由于条件所限,测量点不能取得太多。但为了保证成像计算的精度,网格必须划分得很细,因此网格数量常常大于测量点数量。这造成线性方程组(3)的未知量个数大于方程个数,数学上应有无穷多组解。这种由于已知信息不足以唯一确定未知量的情况就是伪逆问题。

积分方程(1)式属于第一类 Fredholm 积分方程,理论可以严格证明,第一类 Fredholm 积分方程的求解是不稳定的,这造成矩阵方程组(3)的系数矩阵 A 常常是病态矩阵。^[11]

3 伪逆和病态问题

许多物理逆问题都可以从基本模型出发化为如下算子方程:

$$Au = b \tag{4}$$

其中 A 表示系统算子, b 表示系统输出, u 表示待求量。

对微波成像反演计算,对应于积分方程(1), b 表示散射场的测量值, A 表示关于 Green 函数的积分算子, u 表示散射体的等效电流密度 K 。

早在 1900 年,Hadmark 研究与 Laplace 方程求解有关的 Cauchy 问题时,就提出了良态 (well-posed) 的概念^[2]。对方程(4),它是良态的条件

为:^[7]

- ①在定义域内,对应每一个 b ,都有解 u 存在。
- ②解 u 是唯一的。
- ③当 b 有微小的扰动时,在不另加限制条件的情况下,解 u 只产生微小的变化。

如果上面三个条件任意一个不满足,这个问题就是病态(ill-posed)的。

不满足第一个条件,可采用最小二乘法^[2](least-squares solution)求解。求解公式为:

$$u = [A^* A]^{-1} A^* b \tag{5}$$

其中 A^* 为系数矩阵 A 的共轭转置矩阵。

不满足第二个条件常被称为伪逆问题,不满足第三个条件常被称为病态问题。

3.1 伪逆问题及求解方法:

伪逆问题在许多物理逆问题,特别是工程应用上是常常存在的。它实际上是由于测量数据过少或部分数据相关,造成已知信息不足以唯一确定未知量。从数学角度,伪逆问题应有无穷多组解。^[5]

在微波成像中,已知的仅是成像区域内有限个测量点的场强值,有多种可能的介质分布会在这些测量点上产生相同的场分布。因此,仅知道这些有限个测量点上的场分布,是不可能唯一确定区域内的介质分布的。

对伪逆问题,必须采用一些特殊方法来从无穷多解中挑出一组解。

下面介绍几种伪逆问题的求解方法。设线性方程组为: $Au=b$, 系数矩阵 A 为 $m \times n$ 阶矩阵($m < n$), 矩阵秩为 $s=m$ 。

方法 1 最小方差解:^[6]

求解公式为:

$$u = A_g^{-1} b + (I - A_g^{-1} A) z \tag{6}$$

其中 z 为 r 维 Euclid 空间中任意向量, A_g^{-1} 为系数矩阵 A 的广义逆矩阵。

其中一组解 $u = A_g^{-1} b$ 称为范数最小的最小方差解。

方法 2 范数最小原理:

在所有可能的解中,挑选出满足某一范数准则值最小的解作为计算结果。其数学意义在于保证解的存在性和唯一性;其物理意义为:找一组和猜测解 u_c (由先验信息确定) 最接近的解,接近程度由范数的大小来衡量。下面是一些可供采用的范数最小准则^[9]:

- (1) Minimize $\sum |K|$
- (2) Minimize $\sum |K|^p$

- (3) Minimize $(1-a) \sum |K| + a \sum |K|^p$
- (4) Minimize $\sum \left| \frac{\partial K}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial K}{\partial y} \right|^2$

方法 3 正则化方法:^[6,11]

其原理为:选取某个依赖待求函数 u 的线形算子 $M(u)$, 取 x 和一小正数 c , 在 $\|M(u)\| = c$ 的限制条件下最小化 $\|Au-b\|$, 这时 u 称为正则解。

由条件极值中的 Lagrange 乘子法可知,该问题可转化为最小化

$$\{ \|Au-b\|^2 + \lambda \|M(u)\|^2 \} \tag{7}$$

其中 λ 为 Lagrange 乘子

(7) 式可等效为矩阵方程:

$$u = (\lambda \|M(u)\|^2 + A^T A)^{-1} A^T b \tag{8}$$

(8) 式便是被广泛应用的 Tykhanov 正则化方法, λ 称为正则参数。

算子 $M(u)$ 的选取不是唯一的,可以构造不同的算子以及选择不同的正则参数,从而构造不同的正则化方法。

当 M 取为恒等算子,即 $M(u) = u$, 则得到一个较简单的正则化公式:

$$u = (\lambda I + A^T A)^{-1} A^T b \tag{9}$$

其中 I 为单位矩阵。

例 1 伪逆方程组

36.86234

51.23934

53.50338

50.49425

51.23934

71.22350

74.37005

70.18714

53.50338

74.37005

77.66725

73.29752

u^1

u^2

u^3

u^4

$=$

192.0994

267.02003

278.8337

可明显看出, $u^1 = u^2 = u^3 = u^4 = 1.0$ 为其中一组解。

用范数最小原理,采用准则 Minimize $\sum |K|^p$, 求解结果如下:

解 u^1	解 u^2	解 u^3	解 u^4
-0.018304	1.630083	1.19954	0.8926

随机对例一方程组加微小的误差(采取对第二个方程的常数项乘以 1.001), 求解结果如下:

解 u^1	解 u^2	解 u^3	解 u^4
1935.89	-1187.67	-328.79	144.114

可见,用范数最小原理求解是不能保证求解的稳定性,微小的误差能引起求得的解的巨大的变化。

用正则化公式(9),取不同正则参数得到的一系列结果。

参数 λ	解 u_1	解 u_2	解 u_3	解 u_4
0.100	0.74974	1.0459	1.09101	1.03498
0.010	0.74803	1.0055	1.15248	1.09402
0.001	0.16455	1.1092	0.97276	1.35823
0.0001	-0.5533	-6.137	0.23954	3.9976

对例一方程组的常数项随机加上一些误差(误差相对大小为 10%),用正则化公式(9)求得的系列解如下:

参数 λ	解 u_1	解 u_2	解 u_3	解 u_4
0.100	0.6837	0.9409	1.17435	1.10576
0.010	-0.634	0.2817	1.65875	1.84270
0.001	-1.105	-5.391	5.90218	4.40792
0.0001	-9.352	-13.51	7.5766	15.764

可以看出,范数最小原理求解是不能保证求解的稳定性.正则参数 λ 取值适宜时,正则化方法能在一定程度上保证求解的稳定性.但对正则参数 λ 的设定是一个难点,参数 λ 的取值对求解的结果有很大的影响,参数 λ 的选取理论上是由先验信息来决定(通常人们对被测物体并非一无所知,如何充分利用一些先验的信息,将其“翻译”成数学语言融合到算法中,是一个非常具体而重要的问题).但实际上无明确的规律可循,一般通过经验和大量尝试选取参数 λ 选取是否适宜,只有通过数值计算才能确定.

对微波成像算法研究的过程中,我们体会到,伪逆问题的研究的意义在于获得伪逆问题较好的求解方法,其标准应为:

- ①解应足够精确地满足已知条件.
- ②求解过程应尽可能“融合”各种可能的已知信息,以尽量减小可能解的范围.
- ③解应稳定.小的误差不应造成结果大的偏离.
- ④求解应便于计算,特别应便于计算机编程计算.不对已知函数加过多、难以检测的条件.

根据这个标准,我们在微波成像计算选用了正则化方法处理伪逆问题.正则化方法的优点在于求解比较准确和稳定,主要缺点在于正则参数的选取困难,只有通过大量尝试后,凭经验选取,不能保证所有情况下都是最佳值.

3.2 病态问题及求解方法:

如前所述,第一类 Fredholm 积分方程固有的求解不稳定^[11],造成微波成像常常面临病态线性方程组的计算.由于各类误差不可避免,若对病态不加以较好的处理,将会使计算得不到正确的结果.因此

病态的研究有很重要的意义,特别在工程应用上非常重要.

例 2 方程组

$$\begin{vmatrix} 1.012671 & 1.446949 \\ 1.446949 & 2.068525 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.006324242 \\ 0.002755853 \end{vmatrix}$$

它的准确解为 {8.4448 - 5.9059}.假设在计算过程中只使用五位有效数字,用高斯消元法求出的结果为 {9.9773 - 6.9786},与准确解相比有较大的误差.

对病态的研究一直是应用数学研究的热点.目前,有许多改善病态的方法,例如:全主元高斯消去法、向量迭代方法、前面论述过的正则化方法、GPST、最佳摄动量法、遗传算法等等^[6~11].同伪逆一样,病态也正在深入研究,还没有理想的求解方法可供采用.

我们在微波成像的计算中采用了迭代修正方法^[8]求解病态线性方程组,它的优点在于可较大程度地提高对病态方程组的求解精度,不需要选取参数,因此方便实用,适用面广.但求解极端病态的方程组,会因误差过大而完全不收敛.求解的步骤如下:

- ①设病态线性方程组 $AX=B$,用全主元高斯消去法求解,得初解 X_1 .
- ②计算剩余向量 $R=B-AX_1$
- ③用全主元高斯消去法求解线性方程组 $AE=R$,解出 E .
- ④求修正解 $X_2, X_2=X_1+E$.
- ⑤重复以上②~④的过程.直到满足

$$\max \frac{|X_2 - X_1|}{1 + |X_2|} < \epsilon$$

为止.

其中 ϵ 为选取的误差系数
用迭代修正方法求解例 2 的解为:
{8.468836 - 5.922683}.

4 微波成像系统成像实例:

采用上述的微波成像反演算法,结合对伪逆和病态的处理,我们成功地研制出了一套微波成像系统.图 2 是该系统对双介质棒和介质圆环的实际成像图,由于成像系统的种种误差,成像图存在较严重的噪声,但介质的大小、形状和位置基本正确,说明了本微波成像系统对实际介质的成像能力.

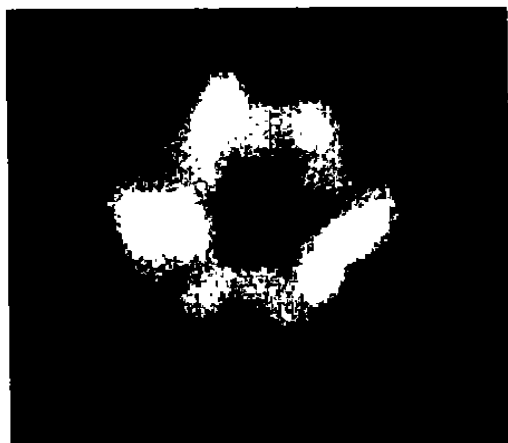
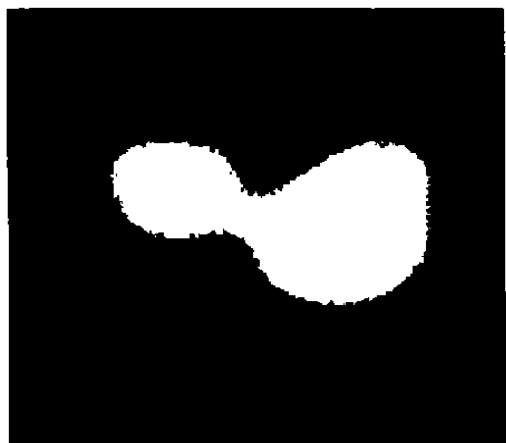


图2 实际系统成像图,前为两个靠近的介质棒,后为一介质圆环

5 结论

由于测量数据不足、物理逆问题本身常存在的不稳定性以及实际工程系统不可避免的各种误差,伪逆和病态严重影响微波成像系统的成像质量。本文中,讨论了一些方法,可一定程度上减少伪逆和病态的不利影响。正则化方法,可用于伪逆问题的求解,并且可克服病态造成的求解不稳定,但正则参数的选取是个难点。目前,对伪逆和病态尚无理想的解决方法,还需要进一步的研究。

参考文献

- [1] L. E. Larsen and J. H. Jacobi, Eds. Medical Applications of Microwave Imaging. [J] New York; IEEE Press, 1986.
- [2] J. Ch. Bolomey. Recent European Development in Active Microwave Imaging for industrial, Scientific and Medical Applications. [J] IEEE Trans. MTT, 1989, 37(12): 2109~2117.
- [3] S. Barkashli and R. G. Lauzenheiser. An iterative method for inverse scattering problems based on an exact gradient search. [J] Radio Science, 1994, 29(4): 1119~1130.
- [4] E. C. Burdette, F. L. Cain and J. Seals. Tissue permittivity at microwave frequencies: Perspective, techniques, results. [J] Medical Applications of Microwave Imaging. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1986, pp. 13~40.
- [5] M. M. Ney, A. M. Smith and S. S. Stuchly. A solution of electromagnetic imaging using pseudoinverse transformation. [J] IEEE Trans. Med. Imaging, December 1984 3(4): 155~162.
- [6] 黄光远, 刘小军. 数学物理反问题[M]. 山东: 山东科

学技术出版社, 1993, 2.

- [7] TAPAN, K. SARKAR. Some Mathematical Considerations in Dealing with the Inverse Problem. [J] IEEE Trans on Ante and Prop, MAR 1981, 29(2): 373~379.
- [8] Alan Jennings. 工程和科学的矩阵算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1991. 9.
- [9] B. McNally, E. R. Pike. Mathematical programming for Positive Solutions of Ill - Conditioned Inverse Problems. [C] Inverse Problems of Wave Propagation and Diffraction. Italy, 1994. 5.
- [10] T. K. Sarkar, D. D. Weiner and V. K. Jain. Some mathematical consideration in dealing with the inverse of a matrix. [J] Commun. ACM, 1996, 9, 381~387.
- [11] 苏超伟. 偏微分方程逆问题的数值方法及其应用. [M] 西北工业大学出版社, 1992. 4.



陈星 (1970-), 男(汉族), 四川省通江县人, 四川大学电子信息学院讲师, 硕士, 主要从事微波理论研究和教学工作。



黄卡玛 (1964-), 男(汉族), 重庆市人, 四川大学电子信息学院教授, 博士导师, 博士, 中国电子学会理事, 中国科学杂志社特邀编辑, 主要从事微波理论研究和教学工作。